ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỨC HẢI

VỀ PHÂN TÍCH ĐA THỨC HAI BIẾN THÀNH NHÂN TỬ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Ngô Thị Ngoan

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Thị Ngoan. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K11B; Nhà trường và các phòng chức năng của Trường; Khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới Trung tâm Nghiên cứu và Phát triển giáo dục Hải Phòng đã giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K11B đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Đức Hải

Mở đầu

Các bài toán về đa thức bất khả quy và bài toán phân tích một đa thức thành các nhân tử đã được đưa vào giảng dạy ngay trong chương trình toán phổ thông. Việc phân tích đa thức thành nhân tử cho phép học sinh chuyển việc giải một phương trình đại số về giải các phương trình có bậc thấp hơn.

Các tiêu chuẩn để xét tính bất khả quy của đa thức cũng luôn được sự quan tâm rất lớn của các nhà toán học từ rất lâu. Chúng ta biết tiêu chuẩn Eisenstein là một tiêu chuẩn khá hữu hiệu để kiểm tra một đa thức đã cho là bất khả quy. Nhắc lại rằng, cho R là một vành nhân tử hóa và $f = f_0 + f_1X + \ldots + f_nX^n \in R[X]$ là đa thức có các hệ tử $f_0, f_1, \ldots, f_n$ nguyên tố cùng nhau. Nếu tồn tại một phần tử nguyên tố $p \in R$ sao cho trừ hạng tử cao nhất f_n các hạng tử còn lại của f đều chia hết cho p và f_0 không chia hết cho p^2, thế thì f bất khả quy trong $R[X]$. Tiêu chuẩn này cho ta một điều kiện đơn giản để kiểm tra một đa thức bất khả quy. Những năm qua, nhiều nhà toán học đã không ngừng mở rộng, tổng quát hóa tiêu chuẩn này. Đặc biệt là việc sử dụng các yếu tố hình học thông qua Sơ đồ Newton và Đa giác Newton để đưa ra những tiêu chuẩn rất hiệu quả cho việc kiểm tra tính bất khả quy của đa thức.

Trong luận văn này, chúng tôi sẽ bắt đầu bằng việc giới thiệu phương pháp sử dụng sơ đồ Newton của đa thức. Nó cho ta khẳng định tính bất khả quy của một lớp khá rộng các đa thức dựa vào đặc điểm của sơ đồ Newton của chúng thể hiện bởi tiêu chuẩn Eisenstein-Dumas và ta sẽ thấy tiêu chuẩn Eisenstein quen thuộc là một trường hợp đặc biệt. Sau đó, bằng phương pháp sử dụng đa giác Newton, chúng tôi trình bày hai nội dung:

(1) Xét tính bất khả quy của đa thức hai biến qua đa giác Newton.

(2) Xét sự phân tích đa thức hai biến với hệ số nguyên thành nhân tử.

Chúng ta sẽ thu được các kết quả rất thú vị về tính bất khả quy của đa thức hai biến thông qua đặc điểm không phân tích nguyên được của đa giác Newton của nó. Thông qua việc nhận diện các đoạn thẳng không phân tích nguyên được, tam giác không phân tích nguyên được sẽ cho ta một số lớp đa thức hai biến bất khả quy trên một trường tùy ý.

Cũng sử dụng công cụ đa giác Newton của đa thức, ta thu được thông tin chính xác về sự phân tích đa thức hai biến hệ số nguyên thành nhân tử. Đó là, đa thức $f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ có nhân tử đa thức không tầm thường khi và chỉ khi dàn các nút của đa giác Newton của f có thể được phủ bởi một siêu phủ phù hợp. Từ cách chọn siêu phủ của đa giác Newton, sẽ cho ta sự phân tích đa thức thành nhân tử.

Nội dung luận văn chia làm 3 chương. Chương 1 ngoài một số kiến thức chuẩn bị về đa thức, đa thức bất khả quy, chương này còn trình bày các khái niệm sơ đồ Newton của đa thức; một số khái niệm và tính chất về tập lồi trong $\mathbb{R}^n$; về đa diện nguyên, đa diện nguyên không phân tích nguyên được và nhận diện một số đa diện nguyên trong $\mathbb{R}^2$ (gọi là đa giác) không phân tích nguyên được. Nội dung chính của luận văn nằm trong Chương 2 và Chương 3. Chương 2 tập trung trình bày một số tiêu chuẩn bất khả quy của đa thức dựa vào sơ đồ Newton và đa giác Newton của đa thức. Chương 3 trình bày điều kiện cần và đủ để một đa thức hai biến với hệ số nguyên có nhân tử đa thức nguyên không tầm thường cùng với một số ví dụ áp dụng.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị về đa thức, sơ đồ Newton của đa thức, đa diện Newton, đa giác Newton của đa thức. Tài liệu tham khảo chính của chương là [1], [2], [3], [5] và [6].

1.1 Đa thức bất khả quy

Định nghĩa 1.1.1. Cho V là một vành giao hoán có đơn vị. Một đa thức một biến với hệ số trên V có thể được viết dưới dạng $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, trong đó $a_0, \ldots, a_n \in V$ và x là một ký hiệu gọi là biến (hay biến không xác định). Ta cũng viết đa thức này dưới dạng $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ hoặc $f(x) = \sum a_ix^i$, trong đó $a_i = 0$ với mọi $i > n$. Hai đa thức $\sum a_ix^i$ và $\sum b_ix^i$ là bằng nhau nếu $a_i = b_i$ với mọi i.

Ký hiệu $V[x]$ là tập các đa thức một biến x với hệ số trên V. Cho $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in V[x]$. Ta gọi a_0 là hệ số tự do của $f(x)$. Nếu $a_n \neq 0$ thì n được gọi là bậc của $f(x)$ và được ký hiệu là $\deg f(x)$. Trong trường hợp này, a_n được gọi là hệ số cao nhất của $f(x)$. Nếu $a_n = 1$ thì $f(x)$ được gọi là đa thức dạng chuẩn. Nếu $f(x) = a \in V$ thì $f(x)$ được gọi là đa thức hằng. Các đa thức bậc 1 được gọi là đa thức tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.2. Với hai đa thức $f(x) = \sum a_ix^i$ và $g(x) = \sum b_ix^i$ trong $V[x]$, định nghĩa

$$f(x) + g(x) = \sum (a_i + b_i)x^i.$$

$$f(x)g(x) = \sum c^k x^k, \text{ trong đó } c_k = \sum a_i b_j \text{ với mọi } k.$$

Khi đó $V[x]$ là vành giao hoán với phép cộng và nhân đa thức. Vành $V[x]$ được gọi là vành đa thức một biến x với hệ số trong V. Phần tử không của vành đa thức là đa thức 0, phần tử đơn vị là đa thức 1.

Mỗi bộ n số nguyên không âm $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$ cho ta một đơn thức $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ của n biến $x_1, \ldots, x_n$ với bậc $i_1 + \ldots + i_n$. Chúng ta thường viết đơn thức này dưới dạng $\mathbf{x}^\mathbf{i}$. Với $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}_0^n$, hai đơn thức $\mathbf{x}^\mathbf{i}$ và $\mathbf{x}^\mathbf{j}$ là bằng nhau nếu $\mathbf{i} = \mathbf{j}$, tức là $i_k = j_k$ với mọi k. Một *từ* là một biểu thức có dạng $a\mathbf{x}^\mathbf{i}$ với $a \in V$ (được gọi là hệ số của từ) và $\mathbf{x}^\mathbf{i}$ là một đơn thức được gọi là đơn thức của từ. Hai từ được gọi là đồng dạng nếu hai đơn thức của chúng bằng nhau. Hai từ được gọi là bằng nhau nếu chúng đồng dạng và có cùng hệ số. Một đa thức là một tổng của hữu hạn từ.

Định nghĩa 1.1.3. Ký hiệu $V[x_1, \ldots, x_n]$ là tập hợp các đa thức n biến $x_1, \ldots, x_2$ với hệ số trong V. Với $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^n$, trong đó $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ và $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$, ta định nghĩa $\mathbf{i} + \mathbf{j} = (i_1 + j_1, \ldots, i_n + j_n)$. Khi đó $V[x_1, \ldots, x_n]$ là một vành với phép cộng

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_\mathbf{i} \mathbf{x}^\mathbf{i} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} b_\mathbf{i} \mathbf{x}^\mathbf{i} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} (a_\mathbf{i} + b_\mathbf{i}) \mathbf{x}^\mathbf{i}$$

và phép nhân

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_\mathbf{i} \mathbf{x}^\mathbf{i} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} b_\mathbf{i} \mathbf{x}^\mathbf{i} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n} c_\mathbf{k} \mathbf{x}^\mathbf{k}, c_\mathbf{k} = \sum_{\mathbf{i}+\mathbf{j}=\mathbf{k}} a_\mathbf{i} b_\mathbf{j}$$

với mọi đa thức $\sum\limits_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_\mathbf{i} \mathbf{x}^\mathbf{i}, \sum\limits_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} b_\mathbf{i} \mathbf{x}^\mathbf{i} \in V[x_1, \ldots, x_n]$. Vành $V[x_1, \ldots, x_n]$ được gọi là vành đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong V.

Định nghĩa 1.1.4. Đa thức khác không, không khả nghịch thuộc $V[x_1, \ldots, x_n]$ được gọi là đa thức bất khả quy nếu nó không có ước thực sự trong vành $V[x_1, \ldots, x_n]$, tức là nếu g là ước của f thì g khả nghịch hoặc f cũng là ước của g.

Chú ý rằng đa thức $f(x)$ với hệ số trên một trường F là bất khả quy nếu và chỉ nếu $\deg f(x) > 0$ và $f(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức có bậc nhỏ hơn.

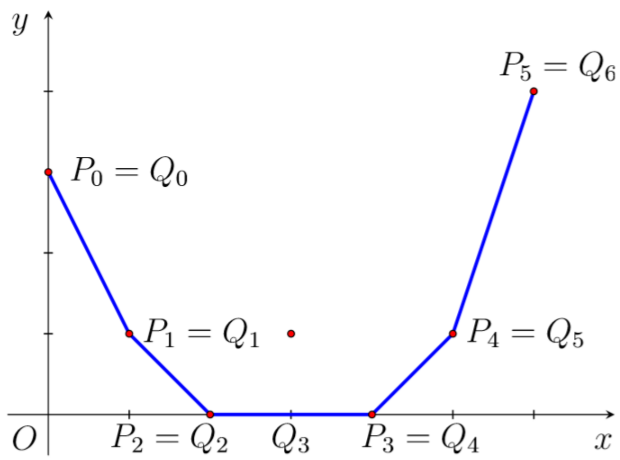
Định nghĩa 1.1.5. Một đa thức trên trường F được gọi là bất khả quy tuyệt đối trên F nếu nó bất khả quy trên mọi mở rộng đại số của F.

1.2 Sơ đồ Newton và đa diện Newton

Cho R là một vành nhân tử hóa và

$$f = f_0 + f_1X + \ldots + f_nX^n \in R[X] \text{ với } f_0f_n \neq 0.$$

Cho $p \in \mathbb{R}$ là một phần tử nguyên tố cho trước, ta biểu diễn mỗi hệ số khác 0 của f dưới dạng $f_i = a_ip^{\alpha_i}$ trong đó a_i là phần tử của R không chia hết cho p. Với mỗi hạng tử khác không của f, ta lấy một điểm tương ứng trong mặt phẳng với tọa độ (i, α_i). Tập các điểm này sẽ cho ta một sơ đồ Newton của f ứng với phần tử nguyên tố p.



Hình 1.1

Đặt $P_0 = (0, \alpha_0)$ và $P_1 = (i_1, \alpha_{i_1})$ trong đó i_1 là số nguyên lớn nhất sao cho không có điểm (i, α_i) nào nằm phía dưới đường thẳng P_0P_1. Sau đó, lấy $P_2 = (i_2, \alpha_{i_2})$ trong đó i_2 là số nguyên lớn nhất sao cho không có điểm (i, α_i) nào nằm phía dưới đường thẳng P_1P_2. Cứ tiếp tục như vậy, đoạn thẳng cuối ta nhận được có dạng $P_{r-1}P_r$ trong đó $P_r = (n, \alpha_n)$. Nếu một số đoạn của đường gấp khúc $P_0P_1 \ldots P_r$ đi qua những điểm có tọa độ nguyên, thì ta thêm vào tất cả các điểm có tọa độ nguyên đó và được đường gấp khúc mới $Q_0Q_1 \dots Q_{r+s}$ trong đó $Q_0 = P_0$, $Q_{r+s} = P_r$.

Định nghĩa 1.2.1. Đường gấp khúc $Q_0Q_1 \dots Q_{r+s}$ được xây dựng như trên được gọi là *Sơ đồ Newton* của f ứng với phần tử nguyên tố p. Các đoạn P_lP_{l+1} và Q_iQ_{i+1} tương ứng được gọi là các *cạnh* và các *đoạn* của sơ đồ và các vectơ $\overrightarrow{Q_iQ_{i+1}}$ sẽ được gọi là *vectơ đoạn* của sơ đồ Newton.

Trước khi trình bày về khái niệm đa diện Newton của đa thức ta sẽ trình bày một số khái niệm và tính chất về tập lồi và đa diện lồi.

Ta xét $\mathbb{R}^n$ là không gian vectơ thực, là không gian affine thực, hoặc là không gian Eulid với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n \text{ với } x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

và khoảng cách giữa hai điểm x và y được xác định bởi

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle.$$

Định nghĩa 1.2.2. Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với mọi $x, y \in C, x \neq y$ ta có đoạn thẳng

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

chứa trong C.

Ta nói x là một tổ hợp lồi của $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ nếu tồn tại $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&(1) \quad x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r,\\
&(2) \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1,\\
&(3) \quad \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_r \geq 0.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng, nếu bỏ điều kiện (3) ta gọi x là một tổ hợp affine của $x_1, \ldots, x_r$, khi đó $x, x_1, \ldots, x_r$ được gọi là phụ thuộc affine.
Nếu $x, x_1, \ldots, x_r$ không phụ thuộc affine ta nói chúng độc lập affine.

Định nghĩa 1.2.3. Tập tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử của một tập $S \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là bao lồi của S, ký hiệu conv(S).

$$\text{conv}(S) = \left\{\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i \mid x_i \in S, \lambda_i \geq 0; \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1\right\}.$$

Khi $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ là một tập hữu hạn, ta gọi $\mathrm{conv}(S)$ là một *đa diện* và cũng sử dụng ký hiệu $\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_k)$. Một điểm x của đa diện được gọi là đỉnh nếu nó không thuộc bất kỳ một đoạn tạo bởi hai điểm phân biệt nào khác x của đa diện. Ta có một đa diện luôn là bao lồi của các đỉnh của nó và ngược lại mỗi đỉnh của bao lồi $\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ đều là một trong số $x_1, \ldots, x_k$.

Chú ý 1.2.4. Với tập lồi C trong $\mathbb{R}^n$, ta gọi số chiều của bao affine $\mathrm{aff}(C)$ là số chiều của C và ký hiệu $\dim C$. Rõ ràng nếu $\{x_1, \ldots, x_r\}$ độc lập affine thì $\dim(\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_r)) = r - 1$.

Cho C là một tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ và $a_0 \in C$. Một siêu phẳng

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \cdot x - \beta = 0\}, \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$$

đi qua a_0, được gọi là một siêu phẳng tựa của C tại a_0 nếu với mọi $\alpha \in C$ ta đều có $\alpha \cdot a - \beta \leq 0$. Khi đó ta còn nói một cách ngắn gọn H là siêu phẳng tựa của C.

Cho P là một đa diện trong $\mathbb{R}^n$, một *mặt* của P được định nghĩa là giao của P với một siêu phẳng tựa của P. Một *đỉnh* của P là một mặt có chiều 0, mặt có chiều 1 là một *đoạn thẳng* mà ta gọi là cạnh của P.

Định nghĩa 1.2.5. Cho A và B là hai tập con của $\mathbb{R}^n$, tập hợp

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

được gọi là tổng Minkowski của A và B.

Ta thấy rằng tổng Minkowski của hai tập lồi cũng là một tập lồi. Ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.2.6. *Giả sử*

$$A = \mathrm{conv}(a_1, \ldots, a_n), B = \mathrm{conv}(b_1, \ldots, b_m),$$

khi đó ta có

$$A + B = \mathrm{conv}\left(\{a_i + b_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}\right).$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh bao hàm " $\subseteq$ ". Lấy phần tử $v = v_1 + v_2 \in A + B$, khi đó $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, $v_2 = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j b_j$, $\lambda_i, \mu_j \geq 0$ với mọi i, j